ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS CADRE DE GESTION STATISTIQUE
CONCOURS EXTERNE D'ATTACHÉ DE L'INSEE (M)

OPTION A (MATHEMATIQUES)

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

PREAMBULE

On suppose a priori que l'on ne connait pas le produit vectoriel dont, précisément, le présent problème propose, entre autre, une définition et une étude d'un certain point de vue.

$\mathbb{R}$ étant le corps des réels, E est l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique orthonormale $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

avec $\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

E est orienté par la classe d'équivalence des bases directes dont B est un représentant.

On note $\langle \vec{v},\vec{v'} \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ de E et $\|\vec{v}\|$ la norme de $\vec{v}$ définie par $\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v},\vec{v} \rangle$.

$\hat{E}$ est un espace affine attaché à E rapporté au repère ordonné (O,B), d'origine O.

$\vec{\omega}$ est un vecteur particulier de E dont aucune des composantes $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ sur B n'est nulle et dont la norme $\|\vec{\omega}\|$ est notée ω.

On note Ω l'unique point de $\hat{E}$ défini par $\overrightarrow{O\Omega} = \vec{\omega}$.

Si M est une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$, on note ${}^tM$ sa transposée.

I - PREMIERE PARTIE

On désigne par T l'application de E dans E qui au vecteur $\vec{v}$ de composantes (x,y,z) sur la base B de E associe le vecteur $\overrightarrow{v'}$ dont les composantes sur B sont :

$$\begin{pmatrix} x' = yc - zb \\ y' = za - xc \\ z' = xb - ya \end{pmatrix}$$

et on note $\overrightarrow{v'} = T(\vec{v}) = \vec{v} \wedge \vec{\omega}$.

On désigne par $\hat{T}$ l'application de $\hat{E}$ dans $\hat{E}$ attachée à T qui à tout point P associe P' défini par $\overrightarrow{OP'} = T(\overrightarrow{OP})$.

I.1.a) Montrer que T est un endomorphisme de E dont on écrira la matrice M par rapport à B.

b) Montrer que l'endomorphisme ${}^tT$ de E dont la matrice relativement à B est ${}^tM$ vérifie ${}^tT = -T$.

I.2.a) Calculer $\langle T(\vec{v}), \vec{v} \rangle$ et $\langle T(\vec{v}), \vec{\omega} \rangle$ où $\vec{v}$ est vecteur de E.

b) Déterminer le noyau de T et, sans utiliser M, en déduire que T n'admet qu'une seule valeur propre réelle que l'on donnera ; déterminer le sous-espace propre K associé à cette valeur propre.

c) Retrouver ces deux derniers résultats à partir de M.

I.3.a) Préciser la structure algébrique de l'image F de E par T que l'on caractérisera par une relation que vérifient les composantes de ses vecteurs sur B.

b) Déterminer l'équation cartésienne de l'image $\hat{F}$ de $\hat{E}$ par $\hat{T}$.

I.4.a) Etablir que E est somme directe de K et de F .

$\vec{v}$ étant un vecteur de E tel que $\vec{v} = \vec{k} + \vec{f}$ avec $\vec{k}$ dans K et $\vec{f}$ dans F, déterminer $T(\vec{v}) - T(\vec{f})$ ainsi que les composantes sur B de $\vec{k}$ et $\vec{f}$ en fonction des composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\vec{v}$ sur B .

b) Etablir la relation : $\|T(\vec{v})\|^2 = \omega^2 \|\vec{v}\|^2 - (\langle \vec{v}, \vec{\omega} \rangle)^2$ et en déduire l'expression de $\|T(\vec{v})\|$ en fonction de ω et de $\|\vec{f}\|$.

c) Montrer que les restrictions T_r et $\hat{T}_r$ de T et de $\hat{T}$ à F et $\hat{F}$ respectivement sont bijectives.

I.5. Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de E, dont les composantes sur B sont respectivement (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) , étant donnés, on désigne par $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ le vecteur $\vec{v}_3$ de E dont les composantes sur B sont :

$$\begin{cases} x_3 = y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ y_3 = z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ z_3 = x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{cases}$$

a) Soit $\vec{u}$ un vecteur de E, montrer que :

$$\left\langle \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2, \vec{u} \right\rangle = \det_B \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u} \right)$$

où $\det_B \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u} \right)$ est le déterminant du triplet $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u} \right)$ dans la base B. Montrer que l'application Φ_u du produit cartésien E × E dans $\mathbb{R}$ qui au couple $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \right)$ associe le réel :

$$\Phi_u \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \right) = \left\langle \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2, \vec{u} \right\rangle$$

est une application bilinéaire alternée.

b) Montrer qu'il existe des couples $\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2 \right)$ de F × F tels que le déterminant du triplet $\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{\omega} \right)$ dans la base B est <u>strictement</u> positif ; montrer que tous ces couples sont des bases de F définissant la même orientation de F.

<u>Choisissant ces bases pour bases directes, on munit F de cette orientation dans toute la suite du problème</u>.

c) Montrer qu'un couple $\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2 \right)$ est une base directe de F si et seulement si $\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{\omega} \right)$ est une base directe de E.

I.6.a) F étant ainsi orienté, montrer que la restriction $\hat{T}_r$ de $\hat{T}$ à $\hat{F}$ est une similitude dont on précisera le centre, l'angle et le rapport.

b) Déterminer la nature géométrique de l'application $\hat{P}$ de $\hat{E}$ dans $\hat{F}$ telle que la composition $\hat{T}_r \circ \hat{P}$ vérifie $\hat{T}_r \circ \hat{P} = \hat{T}$.

c) Déterminer la nature géométrique de l'application $\hat{S}$ de $\hat{E}$ dans $\hat{E}$ vérifiant $\hat{P} \circ \hat{S} = \hat{T}$.

II - DEUXIEME PARTIE

On note T^2 la composition T o T, et on pose $T^1 = T$ et on définit, pour tout entier $n > 1$, l'endomorphisme T^n par $T^n = T^1 \circ T^{n-1}$; on note M^n la matrice de T^n relativement à la base B de E.

On désigne par $\hat{T}^n$ l'application de $\hat{E}$ dans $\hat{E}$ attachée à T^n c'est-à-dire celle qui à tout point P de $\hat{E}$ associe le point P_n défini par $\overrightarrow{OP_n} = T^n(\overrightarrow{OP})$.

II.1. Montrer que M^n est la puissance de M d'ordre n.

II.2. Sans utiliser M^2 :

a) Démontrer que zéro est valeur propre de T^2 et déterminer le sous-espace propre correspondant ;

b) Montrer que si λ est valeur propre non nulle de T^2, alors le sous-espace vectoriel F défini à la question I.3. est le sous-espace propre correspondant, et déterminer $|\lambda|$ en fonction de ω .

c) Etudiant la nature géométrique de la restriction $\hat{T}^2_r$ de $\hat{T}^2$ à $\hat{F}$, déterminer le signe de λ .

II.3. En utilisant M^2 :

a) Calculer le polynôme caractéristique de T^2 et retrouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de cet endomorphisme.

b) Déterminer les images de E et $\hat{E}$ par T^2 et $\hat{T}^2$ respectivement.

II.4.a) Etablir la relation :

$$T^2(\vec{v}) = -\omega^2\vec{v} + \langle\vec{v},\vec{\omega}\rangle\,\vec{\omega} \quad .$$

et partant de cette relation, retrouver à nouveau les valeurs propres et les vecteurs propres de T^2 .

b) Soit un vecteur $\vec{v}$ de E tel que $\vec{v} = \vec{k} + \vec{f}$ où $\vec{k}$ est dans le sous-espace K défini à la question I.2.b) et $\vec{f}$ est dans F : exprimer $\|T^2(\vec{v})\|$ en fonction de $\|\vec{f}\|$, puis de $\|T(\vec{v})\|$.

II.5. Montrer que T_r^2 et $\hat{T}_r^2$ sont des bijections.

II.6. Donner une expression très simple de l'endomorphisme T^3 en fonction de ω et de l'endomorphisme T et, dans ce cas particulier, vérifier le théorème de Cayley-Hamilton.

II.7 Discuter la nature géométrique de T^n et de $\hat{T}^n$. Dans le cas où $\omega < 1$, déterminer les limites de $T^n(\vec{v})$ et de $\hat{T}^n(P)$, où $\vec{v}$ est dans E et P est le point de $\hat{E}$ tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$.

III - TROISIEME PARTIE

On note I l'application identique de E. Soit α un réel quelconque non nul qui, d'après la question I.2., ne peut être valeur propre réelle de T.

III.1. Sans utiliser leurs matrices relativement à la base B de E, vérifier que les endomorphismes $(\alpha I + T)$ et $(\alpha I - T)$ sont inversibles.

III.2. Effectuer la division euclidienne du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de la matrice M de T relativement à la base B par les polynômes $(\lambda + \alpha)$ et $(-\lambda + \alpha)$ où λ est l'indéterminée.

III.3. Exprimer les inverses $(\alpha I + T)^{-1}$ et $(\alpha I - T)^{-1}$ des endomorphismes $(\alpha I + T)$ et $(\alpha I - T)$ comme fonctions polynomiales de T.

III.4. On note Q_α la composition $(\alpha I + T)^{-1} \circ (\alpha I - T)$.

a) Montrer que cette composition est commutative et donner Q_α sous forme d'une fonction polynomiale de T et de I .

b) Etudier les restrictions des endomorphismes $\alpha I + T$ et $\alpha I - T$ au sous-espace K (défini à la question I.2) et en déduire une valeur propre de Q_α et le sous-espace propre associé.

c) Retrouver les résultats précédents à partir de l'expression polynomiale de Q_α , et montrer que la restriction de cet endomorphisme à F (sous-espace de E défini à la question I.3.) est un automorphisme n'admettant pas de vecteur propre.

En déduire l'ensemble des valeurs propres et les espaces propres de Q_α .

III.5. On définit l'endomorphisme ${}^tQ_\alpha$ de E, transposé de l'endomorphisme Q_α, par sa matrice $M({}^tQ_\alpha)$ relativement à la base B de E en posant :

$$M({}^tQ_\alpha) = {}^tM_\alpha$$

où ${}^tM_\alpha$ est la matrice transposée de la matrice M_α de l'endomorphisme Q_α relativement à E .

a) Ecrire ${}^tM_\alpha$.

b) Montrer que Q_α est inversible et que son inverse Q_α^{-1} est ${}^tQ_\alpha$; on dit que Q_α est orthogonal.

III.6. On désigne par $\hat{Q}_\alpha$ l'application de $\hat{E}$ dans $\hat{E}$ attachée à Q_α, qui à tout point P de $\hat{E}$, associe le point P_α défini par $\overrightarrow{OP_\alpha} = Q_\alpha(\overrightarrow{OP})$.

a) Déterminer les coordonnées de P_α en fonction des coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de P.

b) Montrer que Q_α est une rotation dont on donnera l'axe et l'angle.

——— · ———